VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

X. osztály – I. forduló

1. feladat. a) Igazold, hogy $\dfrac{1}{\log_b a} + \dfrac{1}{\log_c a} \geq \log_{\frac{a^2+4}{4}} b + \log_{\frac{a^2+4}{4}} c$, ahol $a, b, c \in (1, \infty)$!

b) Mutasd ki, hogy $\log_{bc} \dfrac{a^2+4}{4} + \log_{ca} \dfrac{b^2+4}{4} + \log_{ab} \dfrac{c^2+4}{4} \geq \dfrac{3}{2}$, ahol $a, b, c \in (1, \infty)$!

c) Határozd meg az a, b, c egynél nagyobb természetes számokat úgy, hogy

$$\log_{bc} \frac{4bc}{a^2+4} + \log_{ca} \frac{4ca}{b^2+4} + \log_{ab} \frac{4ab}{c^2+4} \geq \frac{3}{2}.$$

2. feladat. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$5(\sqrt[3]{5x-9}+1) = (x-1)^3 + 9.$$

3. feladat. a) Határozd meg az $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ szürjektív függvényt, ha

$$f(x) \cdot f(f(x)) + f(f(x)) = f(x) - 1,$$

minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ esetén!

b) Értelmezzük a $h_n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-szer } f}$ függvényeket, ahol $n \in \mathbb{N}^*$. Határozd meg a h_{2024} függvényt!

4. feladat. Az ABC egyenlő oldalú háromszög köré írt kör egységnyi sugarú. A kör tetszőleges M pontja esetén igazold a következő egyenlőtlenségeket:

a) $MA \cdot MB \cdot MC \leq 2\sqrt{2}$;

b) $\dfrac{1}{MA} + \dfrac{1}{MB} + \dfrac{1}{MC} \geq \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 4 óra.