VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

XII. osztály – I. forduló

1. feladat. Határozd meg az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{e^{2x}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{e^{2x}}{1 + e^x + e^{2x}}$$

függvény primitív függvényeit!

2. feladat. Adott a $(G, \cdot)$ csoport és az $f\colon G \to G$ függvény úgy, hogy

$$f(xf(y)) = f(x) \cdot y, \text{ bármely } x, y \in G \text{ esetén.}$$

a) Igazold, hogy f csoportautomorfizmus!

b) Határozd meg az f függvényt, ha a G csoportnak öt eleme van!

3. feladat. Határozd meg azokat az $f\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ és $g\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ függvényeket, amelyek egyszerre teljesítik a következő feltételeket:

a) az $F\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty), F(x) = f(x) \cdot e^{-x}$ függvény a g függvény primitív függvénye;

b) a $G\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty), G(x) = g(x) \cdot e^{-x}$ függvény az f függvény primitív függvénye;

c) $f(x) > g(x)$, bármely $x \in (0, +\infty)$ esetén!

4. feladat. A $(G, \cdot)$ véges csoportnak $2n$ eleme van. Legyen $H = \{x \in G \mid x^2 = e\}$, ahol e a $(G, \cdot)$ csoport semleges eleme. Jelölje $|H|$ a H halmaz számosságát.

a) Igazold, hogy ha $|H| \geq n + 1$ és $x \cdot y \in H$, bármely $x, y \in H$ esetén, akkor a $(G, \cdot)$ Abel-féle csoport!

b) Igazold, hogy ha n páratlan, akkor $|H| \leq n + 1$.

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 4 óra.