VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

VI. osztály

1. feladat. Adottak a következő halmazok, ahol $u(p)$ a p szám utolsó számjegyét jelöli:

$$A = \{1 + u(1^{2024});\ 2 + u(2^{2024});\ 3 + u(3^{2024});\ 5 + u(5^{2024})\},$$
$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = u(a),\ a \in A\},$$
$$C = \{b \in \mathbb{N} \mid b = u(y^2),\ y \in \mathbb{N}\}.$$

a) Határozd meg az A, B, C halmazokat az elemeik felsorolásával!

b) Határozd meg az $[(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] \cap [(A \cup C) \setminus B]$ halmaz elemeinek számát!

2. feladat. Egy téglalap alakú papírlapot az oldalakkal párhuzamos egyenesekkel vízszintesen 5 és függőlegesen 60 egyenlő részre osztunk. Így egy négyzethálós lapot kapunk. Igazold, hogy ha egy ugyanakkora méretű papírlapot az oldalakkal párhuzamos egyenesekkel vízszintesen 14, míg függőlegesen 168 egyenlő részre osztunk, akkor az így keletkezett háló kis téglalapjai négyzetek!

3. feladat. Adott az O középpontú és AB átmérőjű kör, F pedig az AO szakasznak egy tetszőleges belső pontja. Vedd fel az AF átmérőjű és C középpontú kört, majd a BC átmérőjű és E középpontú kört! Legyen a két kör sugara $AC = r$ és $EB = R$.

a) Számítsd ki az OE és OC szakaszok hosszát R és r segítségével!

b) Ha $OE = OF$, határozd meg az $\dfrac{AC}{CB}$ arány értékét!

c) Ha az F pont egybeesik az O ponttal, számítsd ki az $\dfrac{AC}{CB}$ arány értékét!

4. feladat. Az $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = n \cdot (64^{12} + 81^9 + 125^8) : (8^{24} + 27^{12} + 625^6),\ n \leq 2024,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ halmaz összes elemét felírjuk a táblára. Letörölünk két számot, majd helyette felírjuk, a letörölt két szám összegének 11-gyel való osztási maradékát. Ezeket a lépéseket ismételve egy idő múlva a táblán az 1003 és még egy szám maradt.

a) Legyen s az A halmaz elemeinek összege. Határozd meg az s osztóinak számát!

b) Melyik szám maradt az 1003 mellett a táblán?

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 3 óra.