VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

VII. osztály

1. feladat. Az x, y, z szigorúan pozitív racionális számok esetén fennállnak az

$$\frac{x}{y+z} = \frac{y}{x+z} = \frac{z}{x+y}$$

egyenlőségek. Mutasd ki, hogy

a) $\sqrt{\frac{x+y}{x+2y+3z} + \frac{y+z}{y+2z+3x} + \frac{z+x}{z+2x+3y}} \in \mathbb{Q}$;

b) $\sqrt{\frac{xy}{z(2x-y)} + \frac{yz}{x(2y-z)} + \frac{zx}{y(2z-x)}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2. feladat. Határozd meg azokat az $\overline{abc}$ alakú háromjegyű természetes számokat, amelyekre egyidőben teljesül, hogy $\sqrt{\overline{a{,}b(bc)} + \overline{b{,}c(ca)} + \overline{c{,}a(ab)}} \in \mathbb{Q}$, illetve az a számjegy a $2b$ és $3c$ számok számtani közepe! Az a, b és c számjegyek nem feltétlen különbözőek.

3. feladat. Egy baráti társaságban vívók, úszók és távugrók vannak. Minden személy csak egy sportot űz. Közülük egy vívó megállapítja, hogy az úszók és távugrók összesen hétszer annyian vannak, mint az ő vívó barátai. Egy úszó úgy számolja, hogy a vívók és távugrók összesen háromszor annyian vannak, mint az ő úszó barátai. Egy távugró pedig azt állítja, hogy az ő távugró barátai annyian vannak, mint a vívók és úszók összesen.
Hány vívó, hány úszó és hány távugró van a baráti társaságban?

4. feladat. Az A csúcsában derékszögű ABC háromszög BM és CN szögfelezői az I pontban metszik egymást, $M \in AC$, $N \in AB$. Legyenek P és Q az M, illetve N pontokból a BC oldalra húzott merőlegesek talppontjai. Továbbá legyen D az MQ szakasz felezőpontja, és E az I pont BC egyenes szerinti szimmetrikusa.

a) Igazold, hogy I az APQ háromszög köréírt körének középpontja!

b) Igazold, hogy $ID \perp BC$!

c) Igazold, hogy $IPEQ$ négyzet!

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 3 óra.