VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

IX. osztály – I. forduló

1. feladat. Ha az a, b és c pozitív valós számok szorzata 1, igazold, hogy

$$\frac{a^{2025}+a^{2024}}{1+bc}+\frac{b^{2025}+b^{2024}}{1+ac}+\frac{c^{2025}+c^{2024}}{1+ab}\geq 3.$$

2. feladat. Igazold, hogy tetszőleges a és b valós számok esetén a következő egyenletek közül legalább egynek van valós megoldása:

$$x^2+2ax+2b=0;$$
$$x^2+2bx+2a=0;$$
$$x^2+4x-ab=0.$$

3. feladat. Az $ABCD$ egyenlő szárú trapézban $AB \parallel CD$. A trapéz kör köré írható, és jelölje E, F, G és H rendre a trapézba írt kör és az AB, BC, CD valamint DA oldalak érintési pontjait. Legyen J, K, L és M rendre az EGH, EFH, EFG és FGH háromszög súlypontja.

a) Igazold, hogy $JK \parallel GF$!

b) Bizonyítsd be, hogy az $EFGH$ és $JKLM$ négyszögek súlypontjai egybeesnek! (Egy négyszög súlypontja az átlói felezőpontját összekötő szakasz felezőpontja.)

c) Legyen N a KL és MJ egyenesek metszéspontja. Ha J az NM szakasz felezőpontja és $AB = 4$, számítsd ki a $JKLM$ négyszög területét!

4. feladat. Az $ABCD$ konvex négyszögben E és F rendre az AC és BD átlók felezőpontja, G és H rendre az AD és BC oldalak felezőpontja, illetve fennáll a $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{EF}$ egyenlőség.

a) Bizonyítsd be, hogy az E és F pontok egybeesnek!

b) Bizonyítsd be, hogy a G, E és H pontok kollineárisak!

c) Ha M a CD egyenes azon pontja, amelyre $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ és P az AH és BM egyenesek metszéspontja, akkor határozd meg az $\frac{AP}{PH}$ és $\frac{BP}{PM}$ arányok értékét!

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 4 óra.