VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

IX. osztály – II. forduló

1. feladat. a) Hány oldala van annak a konvex sokszögnek, amelynek 350 átlója van?

b) Van-e olyan konvex sokszög amelynek $2024^m + 2$ átlója van, ahol $m \in \mathbb{N}$?

2. feladat. Az A-ban derékszögű ABC háromszögben $AB = \sqrt{2}$, E és D rendre az AB és BC oldal felezőpontja. Az AD és CE egyenesek merőlegesek egymásra és az F pontban metszik egymást.

a) Igazold, hogy az AFC háromszög területe egyenlő a $BDFE$ négyszög területével!

b) Számítsd ki a BF szakasz hosszát!

3. feladat. Az $(a_n)_{n\geq 1}$ pozitív tagú sorozatról tudjuk, hogy $a_1 = 1$, és teljesül az alábbi összefüggés:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{a_k \cdot a_{k+1}} = 1 - \frac{1}{a_{n+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Határozd meg a sorozat általános tagját!

b) Bizonyítsd be, hogy $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}\right)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) Igazold, hogy $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2}}{k^3 + 3k^2 + 2k} = \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k}\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n+2} \sqrt{a_k}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

4. feladat. Határozd meg azokat az x, y, z valós számokat, amelyekre

$$(x - 2y - 3)^2 + (x + y - z)^2 + (2x - y - z)^2 = 3.$$

5. feladat. Az ABC háromszögben a BAC szög mértéke $120°$ és AP, BQ, CR az ABC háromszög szögfelezői, $P \in BC$, $Q \in CA$, $R \in AB$.

a) Igazold, hogy $AP = \dfrac{bc}{b+c}$, ahol $b = AC$ és $c = AB$.

b) Bizonyítsd be, hogy $QP \perp PR$.

6. feladat. Lúdas Matyinak van 31 lúdja, 33 kacsája és 35 tyúkja.Találkozik a vásárban Döbrögivel, akinek 27 lúdja, 33 kacsája és 39 tyúkja van. Megegyeznek, hogy cserélni fognak a következő szabály szerint: két darab, különböző fajtájú szárnyasért cserébe a másik ad két szárnyast a harmadik fajtából, vagy fordítva, két ugyanolyan szárnyasért egy-egy darabot a másik két fajtából.

a) Sikerülhet-e Döbröginek úgy csereberélnie, hogy a végén minden fajta szárnyasból ugyanannyi darabja legyen?

b) Sikerülhet-e Lúdas Matyinak úgy csereberélnie, hogy a végén minden fajta szárnyasból ugyanannyi darabja legyen?

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 4 óra.