VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

X. osztály – II. forduló

1. feladat. a) Igazold, hogy $3^p + 2^p$ osztható 5-tel, bármely $p \geq 1$ páratlan természetes szám esetén!

b) Mutasd ki, hogy $3^{12m+1} + 2^{12n+5}$ osztható 5-tel, bármely m és n természetes számok esetén!

2. feladat. Adott az $E(n) = 9^n + 3^{n+1} + 4^n + 3 \cdot 2^n + 2 \cdot 6^n + 2$ kifejezés, ahol $n \in \mathbb{N}$. Tanulmányozd, hogy létezik-e olyan n természetes szám, amelyre

a) $E(n)$ prímszám;

b) $E(n)$ teljes négyzet;

c) $E(n) = 210$.

3. feladat. Oldd meg a valós számok halmazán az

$$(x^2 - 2x)(x^2 - x - 6)(x^2 - 3x - 4) + 36 = 0$$

egyenletet!

4. feladat. Egy kincskereső egy egyenlő oldalú háromszög alakú területet tár fel, amelynek oldala 5 egység. A terület fel van osztva kongruens egyenlő oldalú háromszögekre, amelyek oldalai 1 egység hosszúak és párhuzamosak az eredeti háromszög oldalaival. Minden egyes kis háromszögben egy kincs rejlik. A feltárást a kincskereső bármely kis háromszögben elkezdheti, ezután viszont egy háromszögből csak vele oldalszomszédos háromszögbe mehet át, egy háromszögbe nem térhet vissza és nem hagyhatja el a nagy háromszög területét.
Maximálisan hány kincset gyűjthet be a kincskereső? Adj meg egy útvonalat, amely mentén haladva ez elérhető!

5. feladat. Az ABC háromszög köré írt kör középpontja O, átmérője AM és $N \in AM$ úgy, hogy $BN \perp AM$.

a) Számítsd ki az AOB és BNM háromszögek területének az arányát, ha $\widehat{C} = 105°$.

b) Mekkora az ABC háromszög C szögének a mértéke, ha $3 \cdot T_{AOB\triangle} = 2 \cdot T_{BNM\triangle}$ és $\widehat{C} > 90°$?

6. feladat. Robi felírt a táblára 100 darab egyest. Ezután minden lépésben letöröl egy x számot a tábláról, és helyette felírja az $\frac{x}{2}, \frac{x}{3}, \frac{x}{6}$ számokat. Dávid észrevette, hogy akárhányszor ismétli meg ezt Robi, minden lépés után kiválasztható egy olyan szám, amely legalább 34-szer szerepel a táblán. Bizonyítsd be, hogy Dávid észrevétele helyes!

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 4 óra.