VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
országos szakasz, Nagybánya, 2024. február 26–29.

XI-XII. osztály – II. forduló

1. feladat. Határozd meg az összes olyan természetes számot, amelynek pontosan hat pozitív osztója van, és pozitív valódi osztóinak összege 2024-gyel egyenlő!

2. feladat. Oldd meg a valós számok halmazán a

$$\begin{cases} \log_5(22+x) = \log_3(12-y) \\ \log_5(22+y) = \log_3(12-z) \\ \log_5(22+z) = \log_3(12-x) \end{cases}$$

egyenletrendszert!

3. feladat. Az $ABCD$ húrnégyszög átlói merőlegesek egymásra, E az átlók metszéspontja. A négyszög köré írható kör középpontja O és M az AB oldal felezőpontja.

a) Igazold, hogy $EM \perp CD$!

b) Igazold, hogy $OM = \frac{CD}{2}$!

4. feladat. Az $1, 2, 3, ..., 4n$ számokat szétosztjuk n darab halmazba. Igazold, hogy bármely szétosztás esetén létezik az n darab halmaz valamelyikében három olyan szám, amely egy háromszög oldalainak mérőszáma!

5. feladat. Az ABC háromszögben fennáll a

$$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C + \sqrt{3} \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{5}{4}$$

összefüggés. Igazold, hogy az ABC háromszög egyenlő oldalú!

6. feladat. Tekintsük az $(S_n)_{n\geq 1}$ sorozatot, ahol S_n az első n darab prímszám összegét jelöli ($S_1 = 2, S_2 = 5, S_3 = 10, ...$). Igazold, hogy a sorozatnak nem lehet két egymás utáni tagja négyzetszám!

Megjegyzések: Minden feladat kötelező és 10 pontot ér, melyből hivatalból jár 1 pont. Munkaidő: 4 óra.